

### 3.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При математической обработке равноточных измерений решаются следующие три задачи:

1) определение наилучшего значения измеряемой величины в виде среднего арифметического значения

$$L = \frac{[l]}{n};$$

2) оценка точности результатов равноточных измерений по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{[vv] / (n-1)}, \text{ где}$$

$v$  - отклонения от арифметического среднего;

3) оценка точности среднего арифметического значения по формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Для компактного размещения промежуточных вычислений по приведенным формулам применяется табличная форма.

Решение типового примера.

Пример 6

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. Получены следующие результаты: 217,24 м; 217,31 м; 217,38 м; 217,23 м; 217,20 м.

Произвести математическую обработку ряда равноточных измерений.

№ п/п	$l$ , м	$e$ , см	$V$ , см	$V^2$ , см <sup>2</sup>	$e^2$ , см <sup>2</sup>
1	217,24	+ 4	+ 3	9	16
2	31	+11	- 4	16	121
3	38	+18	+11	121	324
4	23	+ 3	+ 4	16	9
5	20	0	+ 7	49	0
		$\Sigma=+36$	$\Sigma= -1$	$\Sigma=211$	$\Sigma=470$

$$[e] = 36 \quad [v] = -1 \quad [v^2] = 1211 \quad [e^2] = 470$$

$$L = l_0 + \frac{[e]}{n},$$

где  $l_0$  — минимальное значение измеряемой величины, в данном случае  $l_0 = 217,20$  м,  $e$  — остаток, полученный как  $e = l - l_0$ , в сантиметрах.

$$L = 217,20 + \frac{36}{5} = 272,272 \text{ м или } L = 272,27 \text{ м.}$$

Уклонения  $V$  вычисляются по формуле  $v = L - l$ . Контроль:  $[v] = 0$ . За счет округления величины  $L$  контролем служит выражение  $[v] \leq \omega n$ , где  $\omega$  — погрешность округления (в нашем случае  $\omega = -0,002$  м =  $-0,2$  см). Имеем  $-0,2 \cdot 5 = -1$ ; следовательно,  $[v] = -\omega n$ .

Контроль вычисления  $[v^2]$ :  $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$ ;

$$211 = 470 - 259.$$

Вычисление СКП

$$m_1 = \sqrt{\frac{211}{4}} = 7,3 \text{ см.}$$

Оценка надежности СКП по формуле  $m_m = \frac{m_1}{\sqrt{2(n-1)}}$ ,

$$m_m = \frac{7,3}{\sqrt{8}} = 2,6 \text{ см.}$$

Следовательно, в величине  $m_1$  следует оставить только одну значащую цифру, т. е.  $m_1 = 7$  см.

СКП уравненного значения измеряемой величины

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{n}} = 3 \text{ см.}$$

Ответ:  $D = 272,27 \text{ м.} \pm 0,03 \text{ м.}$

### Контрольная задача 6

Один и тот же угол измерен 5 раз с результатами:  $60^\circ 41'$ ;  $60^\circ 40'$ ;  $60^\circ 40'$ ;  $60^\circ 42'$ ; .... Произвести математическую обработку этого ряда результатов измерений.

### Контрольная задача 7

Произвести математическую обработку результатов измерения планиметром площади одного и того же контура: 26,31; 26,28; 26,32; 26,26; ..... га.

### Контрольная задача 8

При исследовании нанесения сантиметровых делений на нивелирную рейку с помощью «женевской» линейки определялась температура в момент взятия отсчета. Для пяти сантиметровых отрезков получены значения:  $20,3^\circ$ ;  $19,9^\circ$ ;  $20,1^\circ$ ;  $20,2^\circ$  .... Провести математическую обработку результатов измерения.

## 3.5. ВЕСА ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ФУНКЦИИ

Определение веса соответствует формуле

$$P = \frac{K}{\sigma^2},$$

где  $K$  — произвольное число;  $\sigma$  — стандарт (теоретическое значение СКП). При большом числе измерений  $m \approx \sigma$ , тогда  $P = K / m$ .

Вес есть надежность измерения, выраженная числом. Вес служит для сравнения точности неравноточных измерений.

## Решение типовых примеров

### Пример 7

Два угла измерены разными наблюдателями с СКП:

$m_{\text{в}} = 0,3'$ ;  $m_{\text{в}} = 0,5'$ . Определить веса этих измерений. По формуле веса

$$P_1 = \frac{K}{0,09}; P_2 = \frac{K}{0,25}.$$

Если выбрать  $K=100$ .

Для получения весов, удобных для сравнения, анализа и т. д., целесообразно коэффициент  $K$  выбрать следующим образом:

$$K = (m_1)^2 \cdot (m_2)^2 \cdot 100; K = 0,09 \cdot 0,25 \cdot 100.$$

Тогда

$$P_1 = \frac{0,09 \cdot 0,25 \cdot 100}{0,09} = 25, P_2 = \frac{0,09 \cdot 0,25 \cdot 100}{0,25} = 9$$

откуда следует, что 1-ый результат является надежнее 2-го.

### Контрольная задача 9

Результатом измерения углов соответствуют  $m_1 = 0,5'$ ;  $m_2 = 0,7'$ ;  $m_3 = 1,0'$ .

Вычислить веса результатов измерений.

### Контрольная задача 10

Веса результатов измерений горизонтальных углов равны 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 соответственно. Вычислить их СКП, если известно, что СКП единицы веса равно .....

Указание: при решении задачи воспользоваться формулой, связывающей  $P$ ,  $m$ ,  $M$ .

### Контрольная задача 11

Найти вес невязки в сумме углов треугольника, если все углы измерены равноточно.

### Контрольная задача 12

Чему равен вес среднего арифметического значения угла, полученного из ... приемов?

Указание: при решении задачи воспользоваться свойствами весов измерений.

При определении веса функции измеренных величин необходимо усвоить следующую программу:

- 1) записывается функция в явном виде;
- 2) определяется СКП этой функции по вышеизложенным правилам;
- 3) осуществляется переход от СКП к обратному весу в соответствии с формулой  $P = K / m^2$ . При  $K = 1$  получаем обратный вес

$$1/P = m^2$$

## Решение типовых примеров

### Пример 8

Вычислить вес дирекционного угла девятой стороны теодолитного хода, если углы хода измерены с  $m_{\text{в}} = 0,5'$ . Исходный дирекционный угол считать

безошибочным.

Функция в соответствии с условием задачи имеет вид

$$\alpha_9 = \alpha_0 + 180^\circ \cdot 9 - \sum_1^9 \beta_i.$$

СКП такой функции определяется по формуле

$$m_{\alpha_9}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_9^2 = 9 \cdot m_\beta^2.$$

С учетом численного значения  $m_\beta$  получим  $m_{\alpha_9} = 9 \cdot 0,5^2 = 2,25'$ . Обратный вес равен  $1/P = m_{\alpha_9}^2$ , или  $1/P = 2,25$ , откуда  $P = 0,45$ .

Пример 9

Определить вес площади прямоугольного треугольника, если катеты  $a = 50$  м и  $b = 80$  м измерены с весами  $P_a = 2$ ,  $P_b = 3$ .

Решение:

$$S = \frac{ab}{2}; \quad m_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 m_b^2;$$

$$\frac{1}{P_s} = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{P_a} + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \frac{1}{P_b};$$

$$\frac{1}{P_s} = \frac{1}{4} b^2 \cdot \frac{1}{P_a} + \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{P_b}; \quad \frac{1}{P_s} = \frac{1}{4} (80)^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (50)^2 \frac{1}{3} =$$

$$= 1008; \quad P_s \approx 0,001.$$

### Контрольная задача 13

Определить вес гипотенузы прямоугольного треугольника, вычисленной по измеренным катетам  $a = 60$  м и  $b = 80$  м, если  $P_a = 1$  и  $P_b = 0,5$ .

### Контрольная задача 14

В треугольнике один угол получен 6 приемами, второй — 18, а третий — вычислен. Найти вес третьего угла, приняв вес измеренного одним приемом угла за единицу.

### Контрольная задача 15

Чему равен вес угла, измеренного тремя приемами, если вес угла, измеренного одним приемом, равен 1.

## 3.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При математической обработке неравноточных измерений одной и той же величины решаются последовательно следующие задачи:

1) определение наиболее надежного результата измерения по принципу весового среднего

$$L_s + \frac{[Pl]}{[P]};$$

2) оценка точности результата, вес которого равен единице. Вычисление СКП единицы веса по формуле Бесселя

$$\eta = \sqrt{\frac{[PVY]}{n-1}};$$

3) оценка весового среднего значения по формуле

$$M_{\text{в}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}}.$$

Для удобства обработки применяется табличная форма вычислений.

Для определения весов измерений в зависимости от условия задачи

применяются следующие выражения:

$$P = K/mI ; P = K/L ; P = K/n ,$$

где  $L$  — длина нивелирного хода;

$n$  — число углов поворота в теодолитном ходе или число станций в нивелирном ходе.

Решение типового примера

Пример 10

На заложенный грунтовый репер по четырем ходам геометрического нивелирования различной длины  $Li$  передана высота  $Hi$

№ ходов	$H_{i,m}$	$L_i$ , км
1	131,172	8,1
2	211	4,2
3	188	5,3
4	195	6,0

Произвести математическую обработку ряда неравноточных измерений.

В данной задаче неравноточность обусловлена различными длинами нивелирных ходов. Веса вычисляют по формуле  $P = K/L$

Если принять  $K = 8,1$ , то СКП единицы веса будет относиться к высоте репера определенной по первому ходу.

$N$ ходов	Высоты $H$ , м	Дли- на хода $L$ , км	Вес $P=K/L$ $K = 8,1$	Остат- ки $e$ , мм	$Pe$ , мм	$V$ , мм	$PV$ , мм	$PV^2$	$Pe e$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	134,172	8,1	1,00	0	0	+22	+22,0	484	0
2	211	4,2	1,93	+ 39	+ 75,3	-17	-32,8	558	2937
3	188	5,3	1,53	+ 16	+ 24,5	+6	+ 9,2	55	392
4	195	6,0	1,35	+ 23	+ 31,0	- 1	- 1,4	1	713
[ ]				5,81	130,8	- 2,4	1098	4042	

$$H_0 = 134,172; \quad \omega[P] = -2,9;$$

$$\frac{[Pe]}{[P]} = \frac{130,8}{5,8} = 0,0225; \quad [Pe^2] - \frac{[Pe]^2}{[P]} = 4042 - 2854 = 1188.$$

$$\bar{H}_{\text{выч}} = 134,1945 \text{ м}; \quad \bar{H}_{\text{окр}} = 134,194 \text{ м};$$

$$\omega = -0,00050 \text{ м} = -0,5 \text{ мм}.$$

Уравненное значение высоты репера оказалось равно

$$\bar{H}_{\text{окр}} = 134,19 \text{ м}.$$

Контроль вычислений:

$$1. [PV] = -1,0, \quad \omega[P] = -2,9;$$

$$2. [PV] = [Pe I] - [Pe] I / [P] = 1097$$

СКП единицы веса, т. е. СКП превышения, полученного по ходу длиной 8,1 км.

$$\eta = \sqrt{\frac{[PV^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1190}{3}} = 19,9 \text{ м}.$$

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{19,9}{\sqrt{6}} = 8,1 \text{ мм}.$$

Следовательно, округленное значение  $\mu = 19 \text{ мм}$ . СКП превышения, полученного по ходу длиной в 1 км, будет

$$\mu_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{K}} = \frac{29}{\sqrt{8,1}} = 7 \text{ мм},$$

что соответствует IV классу геометрического нивелирования. Вес уравненного значения высоты репера равен сумме весов измерений.

$$P_{\bar{H}} = [P] = 5,8 \approx 6.$$

СКП уравненного значения высоты репера

$$m_{\bar{H}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \frac{20}{\sqrt{5,8}} = 8 \text{ мм}.$$

#### Контрольная задача 16

Один и тот же угол измерен различным числом приемов. Произвести математическую обработку результатов измерений:

№ п/п	Значение угла	Количество приемов
1	54°12'18"	5
2	22	3
3	20	.....

#### Контрольная задача 17

По четырем теодолитным ходам на узловую линию передан дирекционный угол. Число углов поворота в каждом ходе различно.

Произвести математическую обработку результатов измерений.

№ п/п	- Значение дирекционного угла	Число углов и в ходах.
1	271 33,5'	.....
2	35,2	8
3	30,0	12
4	32,8	.....

### Контрольная задача 18

По четырем ходам геометрического нивелирования с различным числом станций была передана высота на узловый репер, что дало результаты:

№ п/п	Значение высоты репера, м	Число станций в ходах
1	82,631	.....
2	650	20
3	618	34
4	648	.....

Произвести математическую обработку результатов измерений.

## 3.7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ В ПОЛИГОНАХ И ХОДАХ

Невязки полигонов в сумме превышений нивелирных полигонов или в сумме углов теодолитных полигонов являются погрешностями этих сумм. Поэтому для оценки точности измерений по невязкам используется формула

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}}$$

в которой погрешность  $\Delta_i$  заменяется буквой  $f_i$ , веса выражениями  $1/n_i$  или  $1/L_i$ , где  $n_i$  — число станции в нивелирном полигоне (ходе) или число углов в теодолитном полигоне (ходе);  $L_i$  — периметр нивелирного полигона (хода), а  $n$  — буквой  $N$ . Тогда формула СКП единицы веса принимает вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[f^2]}{N}} \quad \text{или} \quad \mu = \sqrt{\frac{[f^2]}{L}}$$

где  $N$  — число полигонов.

Решение типового примера

### Пример 11

Произвести оценку точности нивелирования по невязкам полигонов, указанным в таблице.

№	Невязки $f_h$ ,	Число	
---	-----------------	-------	--

ПОЛИГОНОВ	мм	станций, $n$	$f_{\text{hI}}$	$f_{\text{hI}}/n$
1	2	3	4	5
1	+32	72	1024	14
2	+2	32	4	0
3	-21	46	441	10
4	+6	27	36	1
5	+8	38	64	2
6	-12	49	144	3
7	-31	63	961	15
8	+15	51	225	4
	[ ]	378	2899	49

В данном случае СКП единицы веса есть СКП превышения на станции, поскольку  $P=1/n$ , имеем :

$$\mu = m_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{49}{8}} = 2,5 \text{ мм.}$$

Контроль:  $m_{\text{ст}} = \sqrt{[f_{\text{hI}}]/[n]} = \sqrt{2899/378} = 2,5 \text{ мм}$

Считая, что в среднем на 1 км хода приходится 10 станций, получим СКП на 1 км по формуле

$$m_{\text{км}} = m_{\text{ст}} \sqrt{10}, \quad m_{\text{км}} = 2,5 \cdot \sqrt{10} = 7,2 \text{ мм.}$$

#### Контрольная задача 19

В таблице приведены невязки в полигонах геометрического нивелирования и периметры полигонов:

№ полигонов	$L$ , км	$f_{\text{h}}$ , мм
1	6	+18
2	12	-14
3	8	-24
4	10	+30
5	15	+34

Оценить точность нивелирования.

#### Контрольная задача 20

Произвести оценку точности измерения углов по невязкам в полигонах.

№ полигонов	Число углов в полигонах	$f_{\text{б}}$
1	20	-2.5'
2	24	+4,8
3	10	-0.5



4	31	-2.8
5	15	+3.0
6	28	+5.2

### Контрольная задача 21

По невязкам в треугольниках триангуляции произвести оценку точности угловых измерений;

№ треуголь- ников	Невязки $f_b$	№ треуголь- ков	Невязки $f_b$
1	+10"	5	+2"
2	- 9	6	-8
3	-5	7	+6
4	+ 2	8	+6

Указание: оценку точности в задаче 21 произвести по формуле Ферреро.

## 3.8. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### 3.8.1. Округление приближенных чисел

Если отбрасывается часть больше 0,5 единицы предшествующего разряда, то округляемая цифра увеличивается на единицу, если меньше 0,5 единицы, то округляемая цифра остается без изменения.

Если отбрасываемая часть равна 0,5 единицы предшествующего разряда, то округление производят до ближайшего четного числа ( правило Гаусса).

Пример:  $15,458 \approx 15,46$ ;  $22,144 \approx 22,14$ ;  $36,655 \approx 36,66$ .

### 3.8.2. Точность приближенных чисел

Точность приближенных чисел определяется числом значащих цифр.

Пример: число 28,3 имеет три значащих цифры. Число 0,00422 имеет тоже три значащих цифры. Число 1,06005 имеет шесть значащих цифр. Число 2500,0 имеет пять значащих цифр, так как оно верно до десятых долей единицы.

Если вместо числа 25643 взять число 26000, то говорят, что в округленном числе имеется две верные цифры; рекомендуемая запись этого числа —  $26310^3$ .

### 3.8.3. Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютная ошибка есть  $\Delta = a - l$ , где  $a$ —истинное значение,  $l$  — результат измерения.

Пример. Число 3,14 есть приближенное значение числа  $\pi$ .

Так как 3,14159 также является приближенным значением числа  $\pi$  пятью цифрами после запятой, то  $\Delta = 0,0016$  есть абсолютная (истинная) ошибка. Относительная ошибка равна:  $\Delta/\pi = 0,0016/3,14 = 1/2000$

### 3.8.4. Приближенное представление некоторых элементарных функций

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}; \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{x};$$

$$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}; l^x \approx 1+x; \ln(1+x) \approx x;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

### 3.8.5. Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы  $(a + b + \dots + t)' = a' + b' + \dots + t'$

Производная произведения  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Производная дроби  $(u/v)' = (u'v - v'u)/(v^2)$

Производная сложной функции

$y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$ ,

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

### 3.8.6. Таблица производных элементарных функций

Функция $y = f(x)$	Производная $y = f'(x)$	Функция $y = f(x)$	Производная $y = f'(x)$
$a = \text{const}$	0	$e^x$	$e^x$
$a + x$	1	$\ln x$	$1/x$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$ax^n$	$an \cdot x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\sqrt[n]{x}$	$1/n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$e^u$	$e^u \cdot u'$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$a^u$	$a^u \cdot u'$

$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\ln u$	$u'/u$
-------	-------------------	---------	--------